PRACTICA 6

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Dado el *problema de valor inicial*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

la solución *numérica* es construida determinando para ciertos valores discretos x_i de la variable independiente, valores aproximados η_i de la solución exacta $y_i = y(x_i)$. Usualmente los valores x_i se toman equidistantes, esto es,

$$x_i = x_0 + i\,h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

donde h es el *paso* de integración. Si x_N denota el último valor discreto de x, podemos asegurar la uniformidad del espaciamiento imponiendo que el cociente $(x_N - x_0)/h$ sea igual a un entero N. De esta forma la solución numérica es obtenida en $(N + 1)$ puntos igualmente espaciados.

Métodos de Runge–Kutta. Los *métodos de Runge–Kutta* tienen tres propiedades distintivas: (i) son métodos de un paso: para encontrar η_{i+1} se necesita solamente la información disponible en el punto precedente (x_i, η_i); (ii) coinciden con la serie de Taylor hasta los términos de orden h^p, en que p es distinto para los diferentes métodos y se denomina el *orden* del método; (iii) no requieren la evaluación de ninguna derivada de $f(x, y)$, sino únicamente de la función en sí.

Un método de Runge–Kutta de primer orden es el denominado *método de Euler*, en el cual las aproximaciones η_i son obtenidas como sigue:

$$\begin{cases} \eta_0 = y_0 \\ \eta_{i+1} = \eta_i + h\,f(x_i, \eta_i) \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Un método de segundo orden es el *método modificado de Euler*, el cual procede como sigue:

$$\begin{cases} \eta_0 = y_0 \\ \eta_{i+1} = \eta_i + h\,f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, \eta_i + \dfrac{h}{2} f(x_i, \eta_i)\right) \\ \qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

El *método clásico de Runge–Kutta* de cuarto orden procede mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \eta_0 = y_0 \\ k_1 = h\,f(x_i, \eta_i) \\ k_2 = h\,f(x_i + h/2, \eta_i + k_1/2) \\ k_3 = h\,f(x_i + h/2, \eta_i + k_2/2) \\ k_4 = h\,f(x_i + h, \eta_i + k_3) \\ \eta_{i+1} = \eta_i + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Ejercicio 1. Sea el problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Su solución exacta es $y = e^x$. Mostrar que el método de Euler aplicado a este problema coincide con los dos primeros términos del desarrollo de Taylor de la solución, en tanto que el método de Euler modificado coincide con los tres primeros términos y el método clásico de Runge–Kutta con los cinco primeros términos.

Ejercicio 2. Implemente los métodos de Euler, Euler modificado, y Runge–Kutta clásico como subrutinas Fortran.

Ejercicio 3. Considere el problema de valor inicial

$$y' = -y + x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1.$$

Compare las soluciones del método de Euler con $h = 0.025$, el método de Euler modificado con $h = 0.05$ y el método de Runge–Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$ en los puntos de red 0.1,0.2,0,3,0.4 y 0.5. La solución exacta del problema es $y = x + e^{-x}$.

Ejercicio 4. Considérese el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= -5\,y, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Determinaremos una solución numérica utilizando un paso $h = 0.5$.

a) ¿Es el problema (matemáticamente) estable para $x \to \infty$?
b) El método de Euler aplicado con dicho paso, ¿es *numéricamente* estable para $x \to \infty$?
c) Calcule la solución numérica a $x = 0.5$ con el método de Euler.
d) El método *implícito* de Euler aplicado con dicho paso, ¿es numéricamente estable $x \to \infty$?
e) Calcule la solución numérica a $x = 0.5$ con el método implícito de Euler.
f) Determine la solución numérica en el intervalo $[0, 10]$ con el método de Euler utilizando los pasos $h = 0.41, 0.4, 0.39$ y 0.15. Grafique las soluciones obtenidas y comente sus resultados.

Ecuaciones de movimiento. La ecuación de movimiento de una partícula de masa m restringida a moverse en una dimensión es expresada, en la formulación Newtoniana de la mecánica clásica, como una ecuación diferencial de segundo orden para la posición x respecto a cierto origen de coordenadas:

$$\ddot{x} = F(t)/m,$$

donde $F(t) = F(x, \dot{x}, t)$ es la fuerza que actúa sobre la misma. Esta ecuación puede ser escrita como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en la forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(t),$$

donde $v(t)$ es la velocidad y $a(t) = F(t)/m$ es la aceleración que experimenta la partícula. La evolución temporal $(x_0, v_0) \to (x, v)$ sobre un intervalo temporal Δt es aproximada por el *método de Euler* según las ecuaciones:

$$v = v_0 + a_0 \Delta t,$$
$$x = x_0 + v_0 \Delta t,$$

mientras que el *método de Euler-Cromer* procede según

$$v = v_0 + a_0 \Delta t,$$
$$x = x_0 + v \Delta t.$$

Ejercicio 5. Considere el oscilador armónico simple para el cual $F = -kx$ donde k es una constante positiva. Por simplicidad, las unidades son escogidas de modo que $k = 1$ y $m = 1$ y las condiciones iniciales son $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

a) Implemente el método de Euler para este problema. Determine la solución numérica sobre un intervalo temporal que comprenda al menos 15 ciclos. Calcule la energía total del sistema $E = v^2/2 + x^2/2$ a partir de la solución numérica. Grafique dicho valor en función del tiempo. ¿Qué observa?

b) Implemente el método de Euler-Cromer y repita las simulaciones del punto anterior. ¿Qué observa?