PRACTICA 4a
Interpolación polinómica.

Un ingeniero, un matemático y un físico se van a cazar ciervos. Cuando ven uno, el físico dispara y el tiro sale desviado a la izquierda. Dispara a continuación el ingeniero y su disparo se desvía a la derecha. Entonces le pregunta al matemático si va a disparar y este dice: "Para qué... prefiero interpolar".

Fórmulas para el polinomio de interpolación. Dada una función $f(x)$ cuyos valores $y = f(x)$ son conocidos en n puntos *distintos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, existe un *único* polinomio $p(x)$ de grado a lo más $n-1$ tal que $p(x_i) = y_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Aunque tal *polinomio interpolante* es único, existen muchas maneras de representarlo. En general, una representación es obtenida a partir de una combinación lineal de n polinomios ϕ_1, ϕ_2, ϕ_n que constituyen una *base* del espacio vectorial de los polinomios de grado hasta $n-1$:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(x),$$

donde los coeficientes c_j son determinados requiriendo que p interpole a f sobre los puntos x_i, esto es,

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

lo cual conduce a un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas $A\mathbf{c} = \mathbf{y}$ donde los elementos de A están dados por $a_{ij} = \phi_j(x_i)$, los elementos de $\mathbf{y}$ son los valores de f en x_i, y los componentes del vector c los coeficientes c_i a determinar. La elección de una base particular determinará el costo computacional para resolver el sistema, su condicionamiento, y la facilidad de la evaluación de la expresión resultante del p. Las elecciones usuales son las siguientes:

1) Tomar la *base de monomios* $\phi_j(x) = x^{j-1}$, con lo cual el polinomio interpolante tiene la forma

$$p(x) = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1},$$

y los coeficientes son determinados del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La matriz (densa) de este sistema es una *matriz de Vandermonde* y el costo computacional de la resolución del sistema a través de un método directo es, como sabemos, $\mathcal{O}(n^3)$.

2) Tomar la base formada por los polinomios $\phi_j(x) = l_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \dfrac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}$, para los cuales $l_j(x_i) = \delta_{ij}$, esto es, 1 si $i = j$ y 0 para $i \neq k$. Por lo tanto, $A = I$, la matriz identidad, y el polinomio interpolante está dado por

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x),$$

expresión conocida como *fórmula de interpolación de Lagrange*. En la práctica, su utilidad es limitada (aunque no así en la teoría) debido a que la determinación y evaluación de la misma es computacionalmente costosa.

3) Tomar la base de polinomios $\phi_1(x) = 1, \quad \phi_j(x) = \prod_{k=1}^{j-1}(x - x_k)$ para $j = 2, \ldots, n$, con lo cual el polinomio interpolante tiene la forma

$$\begin{aligned} p(x) = c_1 + c_2\,(x - x_1) + c_3\,(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ + c_n\,(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

conocida como *fórmula de interpolación de Newton*. Aquí $\phi_j(x_i) = 0$ para $i < j$, es decir, la matriz A es triangular inferior y por lo tanto el costo computacional para la determinación de los coeficientes es $\mathcal{O}(n^2)$.

Por otra parte, cualquiera sea la representación escogida, una cota para el error cometido en la interpolación puede ser obtenida del hecho de que si f es una función con derivada continua hasta el orden n sobre el intervalo que contiene a los puntos $x_1, \ldots, x_n$, entonces existe un ζ en el intervalo más pequeño que contiene a los puntos $x_1, \ldots, x_n, x$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Ejercicio 1. Mostrar que la interpolación lineal de f a través de los puntos x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) está dada por

$$p(x) = \frac{y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)}{(x_2 - x_1)},$$

y que el error cometido en dicha interpolación, para $x_1 < x < x_2$, está acotado por

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{8}(x_2 - x_1)^2,$$

donde M es una cota para la derivada segunda de f en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Ejercicio 2. Determinar el polinomio que interpola los tres puntos $(-2, -27), (0, -1), (1, 0)$ según la base de monomios, la fórmula de Lagrange y la fórmula de Newton.

Fórmula de Newton para el polinomio interpolante. En la práctica la determinación de los coeficientes c_i de la fórmula de Newton no requiere determinar explicitamente la matriz triangular inferior correspondiente, sino que puede obtenerse la solución en forma recursiva como sigue:

Para $k = 1, 2, \ldots, n$
  Tomar $c_k = y_k$
  Para $i = 1, 2, \ldots, k-1$
    Tomar $c_k = \dfrac{c_k - c_i}{x_k - x_i}$

Además, una vez determinado el polinomio interpolante, éste puede ser evaluado eficientemente en un punto cualquiera $x = \xi$ a través de la relación recursiva

$$
\begin{aligned}
b_n &= c_n \\
b_i &= c_i + b_{i+1}\,(\xi - x_i), \quad i = n-1, \ldots, 1
\end{aligned}
$$

siendo, entonces, $b_1 = p(\xi)$.

Ejercicio 3. Escribir una subrutina Fortran para la determinación de los coeficientes c_i del polinomio de grado a lo más $n-1$ que interpola los n puntos (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Escribir también una función Fortran que permita evaluar dicho polinomio en un punto cualquiera.

Ejercicio 4. La interpolación del siguiente conjunto de datos debería conducir a una aproximación de la función raíz cuadrada.

x_i	y_i
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

Estimar los valores de $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{15}$ considerando:

a) El polinomio de grado cuatro que interpola los cinco datos de la tabla.

b) El polinomio lineal que interpola a los dos valores más próximos de la tabla.

¿Cuales aproximaciones son mejores?

¿Que valores obtiene si considera *extrapolar* los cinco datos de la tabla para estimar, por ejemplo, $\sqrt{25} = 5$ ó $\sqrt{64} = 8$?

Ejercicio 5. Fenómeno de Runge. Determinar el polinomio interpolante de grado 10 de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25\,x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

sobre los puntos $x_i = -1 + \dfrac{2\,(i-1)}{10}$, $i = 1, \ldots, 11$. Calcule el error absoluto y relativo en los puntos intermedios a dichos puntos. Grafique y comente los resultados obtenidos.